



TITLE:

素粒子とソリトン (ソリトンの研究会報告集)

AUTHOR(S):

並木, 美喜雄; 大場, 一郎

CITATION:

並木, 美喜雄 ...[et al]. 素粒子とソリトン (ソリトンの研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 83: 25-43

ISSUE DATE:

1970-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/108058>

RIGHT:

素粒子とソリトン

早大 理工

並 木 美喜雄

大 場 一 郎

この研究会の他の話とちがって、これは素粒子物理にソリトンのような非線形波動が模型として利用できないうだろうかという希望の表明である。数学者、流体力学および結晶振動の専門家の興味をよんで、貴重な助言がいただければありがたい。

§1. 場の理論における素粒子像

常識的な素粒子像は従来場の理論を用いて定式化されている。まずそれを簡単に紹介し、従来の考えについての疑問を述べることにしよう。

素粒子はいろいろな物理量をもった単独な自由粒子として運動する。これは適当な波動関数 $\phi(x)$, $\psi(x)$ によって表され、それらは自由場の方程式

$$(\square - m^2)\phi(x) = 0$$

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0$$

(m は質量)

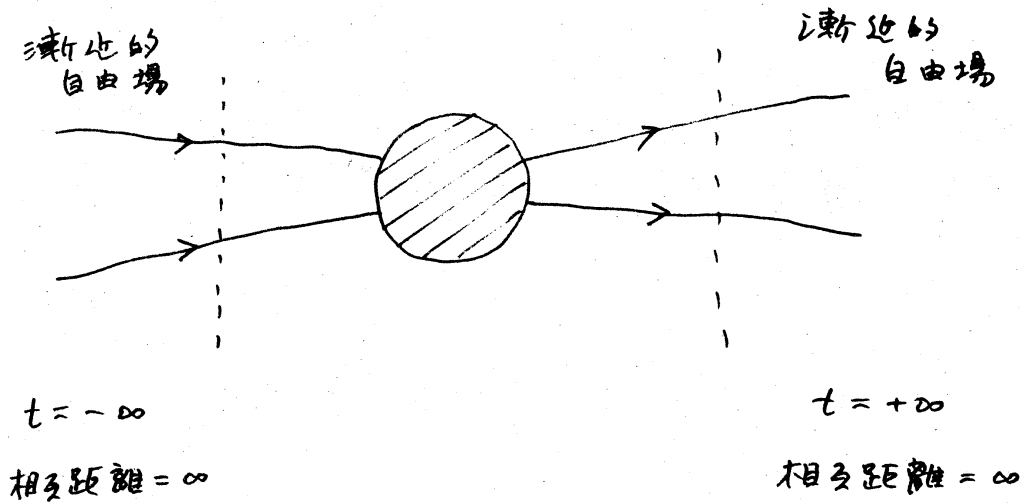
など m を満足する。この方程式の意味は

a) エネルギーと運動量の関係 $p^2 + m^2 = E^2$

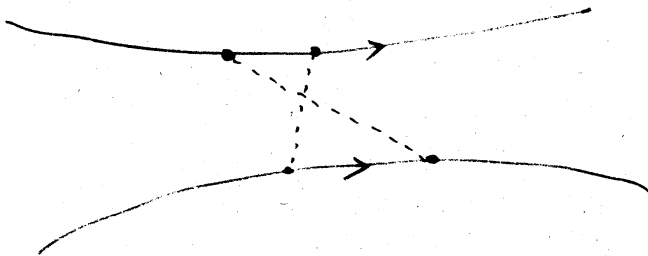
b) エネルギー E と運動量 p が、ある時空領域から別の時空領域へ、この方程式に従ってばらばられることである。

~~またである。~~ さらに ^(c) この方程式の解は、すべての物理状態を表すため、^(c) “完全系”をつくらなければならない。^(c) 普通上記の方程式は“平面波”解をもつが、これはたしかに完全系をつくる。a) b) は素粒子像に対する基本的要請である。

自由場の方程式では、素粒子間の相互作用を記述すること ^(固定ポテンシャルをもつ) はできない。素粒子間相互作用の簡単な例は、^(短距離力に) 2個の粒子が ^(互いに) 十分はなれた場所から出て、近接して力を及ぼし合い、次に互いに遠ざかってゆく。力を及ぼし合う前と後は漸近的に自由粒子であり、上記の自由場の方程式で記述できる。図式的に描けば、次のようになる。



素粒子間相互作用が、このような固定ポテンシャルをもつ短距離力の場合には比較的に簡単であるが、場で媒介されるような場合は話はふくさつになる。この場の量子が散乱相手同士によって交換されるとき(下図)は、話はあまり面倒では



なく固定ポテンシャルの場合と同じように考えてもよい。問題は自己場、すなわち、場の量子を放出した粒子がふたたびそれを吸収する現象をどう処理するかというところにある。図に描けば、下のようになるから、2個の粒子が互いにどのようなにはなれども、相互作用はゼロになる。つまり素

粒子は、場を媒介とする相互作用をもつというかぎり、漸近的に自由場の方程式で記述されるかどうか、^は自明の問題ではない。



従来の常識的な理論では、この自己場の効果はすべて“くりこみ”——すなわち、波動関数の振幅、電荷、質量の値の変化——だけに影響を与えるものとして、一応矛盾のない“くりこみ理論”をつくり出している。そこでは相互作用をしているふくざつな場の方程式を満たす場の量 ϕ, ψ に対して

$$\phi(x), \psi(x) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \begin{matrix} Z_3^{\frac{1}{2}} \phi_R(x) \\ Z_2^{\frac{1}{2}} \psi_R(x) \end{matrix}$$

のようになるものとして——これを境界条件として——方程式を摂動論によって解く。ただし $\overbrace{Z_2, Z_3}^{Z_2, Z_3}$ はくりこみ定数であり、 ϕ_R や ψ_R は自由場である。このような問題設定に対して、果して本当に解が存在するかどうかを数学的な意味で証明することは大へんむずかしいことである。実際、わずかの簡単なオモちゃをのぞいては、誰も成功していない。

相互作用をもつ場は本質的に非線形になる。たとえば、電

子と光子の相互作用をしらべる量子電磁力学 (QED) の基礎方程式は

$$\{\gamma_\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) + m\} \psi = 0$$

$$\square A_\mu = -ie \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

であるが、 A_μ (または ψ) を消去して ψ (または A_μ) だけの方程式をつれば、たしかに非線形方程式になる。このような非線形波動方程式の漸近波動が (くりこまれた) 平面波だけであるという保証は正しいかもしれない。

QED のような実在素粒子の現象論的場ばかりでなく、非線形波動は Heisenberg の統一場理論でも序えられている。Heisenberg は実在素粒子は宇宙に充滿している “原物質” の振動様式であるとし、その “原物質” に対する基礎方程式として スピノール波の非線形方程式を仮定した。彼の理論は数学的に難しきその他の理由で、あまり世に受け入れられていないが、相互作用をもつ素粒子の方程式が一般に非線形になるだろうということは共通の常識である。

したがって、自由粒子として運動中の素粒子が平面波のような自由場の解で記述されるというのも希望的観測にすぎないのではないか。自由粒子を表す非線形波動のモデルが何かないか。今迄の場の理論の困難 — 発散の問題 — が平面波

像とハッキリ密接に結びついていたことを考えれば、本来非線形波動である自由粒子状態を、むしろ特殊な非線形波動として表現する可能性をしらべることにも意味があるかもしれない。

ソリトンはその一つの可能性を示しているようにみえる。

すなわち、相互作用をしている場合

$$\phi \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \phi_{\text{soliton}}$$

を境界条件とする素粒子像が可能であるかもしれない。そこでソリトンが素粒子像の模型と考えられるためには、どのような知識が必要となるかを並べてみよう。

2. 素粒子像のためにほしいソリトンの知識

自由粒子を表すための波動が満足すべき基本的性質は2頁のa), b) であつた。ソリトン またはそれに類する非線形波動が、エネルギーや運動量をはこぶということのは確しからしい。ここではc), すなわち、完全系をつくるかどうかという問題を取り上げる。場の量子論において完全系というのは、任意の物理的状態が自由粒子波動の重ね合せで表せるということである。

(i) すべての物理的状態が $\{\phi_{\text{soliton}}\}$ の (何らかの意味での) 重ね合せによる

2 表示: ψ ができるか? ソリトンはかなり線形に近い性質をもち、ある意味で重ね合せができることが知られているが、その重ね合せの数学的内容およびその重ね合せによって表される関数の範囲を知りたい。

(ii) ソリトン個数の数学的表現をどのようにつくるか。たとえば、

$$\psi_0 = \text{const}$$

$$\psi_1 = \phi(x, t, c) \quad \dots \quad \phi: \text{ソリトン解}$$

$$\psi_2 = \phi_1(x, t, c_1) \phi_2(x, t, c_2)$$

$$(\text{または } \phi_1(x, t, c_1) + \phi_2(x, t, c_2) \text{ なのか})$$

のような Fock 空間表示がつけられるか、そのとき

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

が満足する方程式をコンパクトな解に書くことはできただろうか。

(iii) その方程式を, 境界条件

$$\Psi \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \Psi_{\text{soliton}}$$

によって解くことができるか.

このような総括的な問題に答えるためには, 次のような具体的な知識を参考にする必要があるであろう:

(i) 2個のソリトンの衝突は KdV 方程式では2個のまましていることが証明されているが, その場合の *phase shift* の性質はどうなっているか. すなわち,

$$t = -\infty \quad \text{で} \quad \phi(x - c_1 t - \theta_1^{(-)}) + \phi(x - c_2 t - \theta_2^{(-)})$$

が,

$$t = +\infty \quad \text{で} \quad \phi(x - c_1 t - \theta_1^{(+)}) + \phi(x - c_2 t - \theta_2^{(+)})$$

となったとしたときの $(\theta_i^{(+)} - \theta_i^{(-)})$ の性質 — とくに $\theta_i^{(-)}$ c_1, c_2 に対する依存性などが知りたい. *phase shift* は一般に *effective force* の引力性, 斥力性その他の性質をみるのに都合がよい. KdV 方程式ばかりでなく, 他の場合についても知りたい.

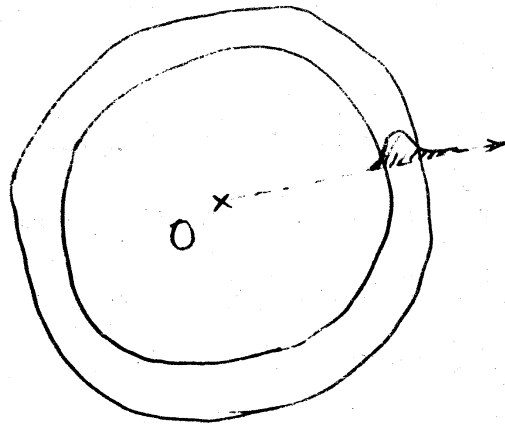
(ii) 個数保存は成立するか. KdV 方程式によれば

2個 \rightarrow 2個であるが、別の方程式ではどうなるか。また KdV 方程式の場合でも、3個 \rightarrow 3個となるか。一般に n 個 \rightarrow n 個なのか。とくに3個 \rightarrow 3個を数値的にしらべることはできないだろうか。

(iii) $F_0(u) = 0$ が soliton を解とする方程式のとき、 $F_0(u) = \pm G(u)$ の方程式の性質をしらべたい。ただし、 \pm は十分小さい数、 $G(u)$ は空間的に localize されている u の汎関数または関数であるとする。簡単には $V(x)u(x)$ のようなものでもよい。そしてどのような G をえらんだらソリトン生成または消滅ができるかをしらべたいのである。すなわち、1個のソリトン + $G \rightarrow n$ 個のソリトン + G (n はゼロを含む) となる G の具体例がつかれるとよい。この調査を KdV 方程式でやれないだろうか。

以上の話を具体的にしらべるには、当分の間1次元 KdV 方程式によらざるをえないだろう。しかし、何時までも1次元のままでは、あまりには、実用性に乏しいかもしれない。(もっとも、次節のような仮想的なパラメータ空間の波動と考える場合はその必要はない。) ここではソリトン波動の3次元化を考えよう。といっても、3次元空間内の粒子状の局在波としてソリトンをつくるのはそれほど簡単ではない。

らしい。(もちろん、その問題を解いて下さるのなら、それも大
へんありがたい。) しかし、必ずしも粒子状局在波は不要か
もしれない。たとえば、 $\xi = \mathbf{r} - \mathbf{c}t$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)
に対して“ソリトン”を考えてもよいだろう。この場合、“ソリト
ン”は、原点を中心とした球殻状の波束になっている。このよ
うな3次元ソリトンの方程式は、1次元の方程式で、た
だ x を r でおき換えただけである。もちろん、 KdV
方程式のままでは簡単に相対論の要求も満足させられないた
ろうが、解は相対論的であるから、何とかテンソル上げら
れたいものでもないと思っている。次節の後半部でわかるよ
うに、この形の“ソリトン”のフーリエ変換と最近話題にな
っている Veneziano Model との間に興味あける関係が
存在する。



さて今度は専らC場理論として考えてきた。一般に素粒子
像をつくるには“量子化”しなければならない。この問題は

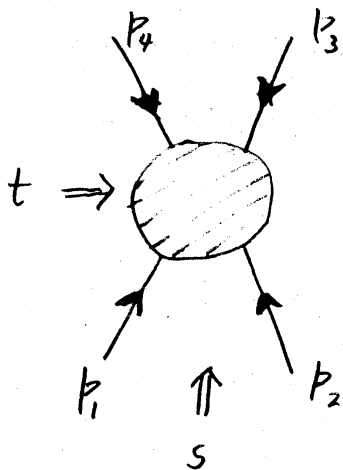
個数を表す方法の定式化にも関連しているのですが、この節のはじめに与えた Fock 表示をつくる問題とも関係がある。

8.3. 最近の素粒子論から

最近いろいろな要求を満足する簡単なモデル散乱振幅が Veneziano によって与えられている。これは一つの近似にらうているのだが、その背後にかくされている未知の "dynamics" を探ることが現在の重要な課題である。まず Veneziano 振幅を簡単に紹介し、それが 1 次元波動に結びついていることを示し、さらにソリトンとの関係もさぐらう。

簡単のため入射・0 のスカラー中性粒子の散乱を考えよう。

(図参照)



ローレンツ不変性などにより、この散乱振幅は 2 個の独立変数 ^{不変な} として表せる：

$$s = -(p_1 + p_2)^2$$

$$t = -(p_1 + p_4)^2$$

ここで $()^2$ はミンコフスキー空間

でのベクトルの長さの 2 乗を示す。ただし時間またはエネルギー成分を -1 にしてある。(例 $p^2 = p_1^2 - p_0^2$)

重心系

↑ の向きに時間 s が経過したとして

$s = 4(p^2 + m^2)$, $t = -2|p|^2(1 - \cos \theta)$ となり,
 s は全エネルギーの2倍, t は運動量受け渡し量を
 与える. これを s -channel という. $t \Rightarrow$ の向きに時間
 が経過する散乱を t -channel という. t -channel では
 t がエネルギー変数になり, s が運動量受け渡し量を表
 す. 散乱振幅は s と t の関数として $F(s, t)$ とかくことに
 しよう. この F は一つの関数で s -channel 振幅と t -channel
 振幅も同時に表さなければならぬので, いろいろな要求が
 つけられる. この場合たとえば, s と t について対称である
 ことがこの一つである. 2つ他に s -channel に現われる共
 鳴散乱の総和として F をかけたとすれば, これは同時に
 t -channel 共鳴散乱の総和に等しくなければならぬこと
 (duality) も要求される. (この意味についてくわしく説
 明しているところはない.) そして t -fixed で $s \rightarrow \infty$ とし
 たとき F が Regge pole 型関数を持つべきである. こ
 れらの諸要求が

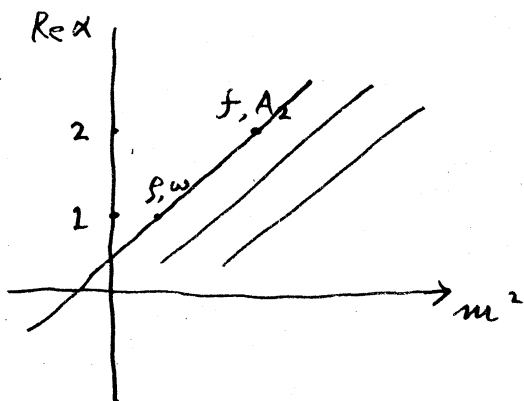
$$F(s, t) = B(-\alpha_s, -\alpha_t) = \frac{\Gamma(-\alpha_s) \Gamma(-\alpha_t)}{\Gamma(-\alpha_t - \alpha_s)}$$

という簡単な関数ですべて満足されることがわかる. B は
 ベータ関数, Γ はガンマ関数であり, そして α_s, α_t は

$$\alpha_s = \alpha_0 + \alpha' s, \quad \alpha_t = \alpha_0 + \alpha' t$$

である。 s または t の ⁽¹⁼²⁾ 関数と (2) の α は Regge trajectory
 とし、知られている。 s 軸に $\text{Re } \alpha$ (これは角運動量とい
 う意味が与えられている) を s 軸に s または t をとると、
 図のように直線が描ける。 s (or t) > 0 は T 度 s channel
 (or t -channel) の共鳴粒子の質量の2乗を表すから、この
 図は実在粒子および共鳴状態のスピン・質量関係を与える。

これを実験によって plot すると互いに 平行な直線群がで
 てくるようである。つまり上の α_s, α_t の式はこれに対応
 して α_0 と α' を変えればわけである。 α_0 は粒子のファミリー
 によっていろいろな値をとるが、 α' はほとんど共通で大体
 $1/(4\pi\alpha') \sim 1 \text{ GeV}^2$ ぐらいの値をとる。



さて B関数に

$$\begin{aligned} F(s, t) &= \int_0^1 dx x^{-\alpha_s-1} (1-x)^{-\alpha_t-1} \\ &= \int_0^1 dy y^{-\alpha_t-1} (1-y)^{-\alpha_s-1} \end{aligned}$$

とみてみよう。 s と t について対称なことは明らかであ
 る。一方簡単な計算で

$$\begin{aligned}
 F(s,t) &= \sum_n \frac{1}{n - \alpha_s} \frac{(-1)^n \Gamma(-\alpha_t)}{\Gamma(-\alpha_t - n + 1) n!} \\
 &= \sum_n \frac{1}{n - \alpha_t} \frac{(-1)^n \Gamma(-\alpha_s)}{\Gamma(-\alpha_s - n + 1) n!}
 \end{aligned}$$

とあるが、これはたしかに duality を示している。さらに
 t -fixed $s \rightarrow \infty$ とする。

$$F(s,t) \longrightarrow \gamma(t) e^{i\pi\alpha_t} \exp[\alpha_0 \ln s + (\alpha' \ln s) t]$$

がえられる。 ($\gamma(t) = \Gamma(-\alpha_t) \left(\frac{\alpha'}{e}\right)^{\alpha_t}$) これはたしか
 に Regge pole 型関数である。かつ $\theta \approx 0$ では $t \approx -p^2 \theta^2$
 であるから、散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{ds} \propto e^{-(\alpha' \ln s) p^2 \theta^2}$$

であり、実験データの半現象論として役に立つことが知られて
 いる。

より簡単のため $\alpha' = \frac{1}{2}$ であるとして $F(s,t)$ の変形をは
 じめよう。外線がスカラ一粒子であるから $\alpha(m^2) = 0$ に注
 意すれば

$$\alpha_t + 1 = c - p_2 \cdot p_3,$$

$$c = 1 - \alpha_0$$

となる。従って被積分函数の中の項 $\underbrace{(1-x)^{-\alpha_0-1}}_{(1-x)^{k_2 \cdot k_3 - c}}$ は

$$(1-x)^{k_2 \cdot k_3 - c} = \exp \left[+ (k_2 \cdot k_3 - c) \ln(1-x) \right]$$

$$= \exp \left[- (k_2 \cdot k_3 - c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right]$$

と表わせる。ここで5次元 Boselike の生成演算子と消滅演算子を導入する:

$$[a_{\alpha}^{(r)}, a_{\beta}^{+(s)}] = \delta_{rs} \delta_{\alpha\beta}$$

$$[a_{\alpha}^{(r)}, a_{\beta}^{(s)}] = [a_{\alpha}^{+(r)}, a_{\beta}^{+(s)}] = 0$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, 5; \quad r = 1, 2, \dots$$

すると指数部分は真空状態 $|0\rangle$ の期待値でかかると加えられる。

$$\exp \left(- (k_2 \cdot k_3 - c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) = \langle 0 | \exp \left[i \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} a^{(n)} \cdot k_3 \right] x^H \times$$

$$\exp \left[i \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} a^{+(n)} \cdot k_2 \right] |0\rangle$$

但し $a_{\alpha}^{(r)} |0\rangle = 0$

$$k_{3\alpha} = (\vec{p}_3, ip_{30}, i\sqrt{c}), \quad k_{2\alpha} = (\vec{p}_2, ip_{20}, i\sqrt{c})$$

$$H = \sum_{n,\alpha} n a_{\alpha}^{+(n)} a_{\alpha}^{(n)}$$

である。4体散乱振幅ではこれで充分であるが、物理的意味付けと多体散乱に拡張するには vertex の部分

$$V(p) = \exp \left[i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_2}{\sqrt{n}} \cdot a^{+(n)} \right] \exp \left[i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_3}{\sqrt{n}} \cdot a^{(n)} \right]$$

$$k_\alpha = (\vec{p}, i p_0, i \sqrt{c})$$

を導入したのが都合がよい。以上の結果を被積分函数に代入して、 x で積分すると

$$F(s, t) = \langle 0 | V(p_3) \frac{1}{H - \alpha_s} V(p_2) | 0 \rangle$$

となる。この意味を、きりさでるために ボーゼ場 $\phi_\alpha(\xi)$ とその共役 $\pi_\alpha(\xi)$ をパラメータ空間 $[0, 2\pi]$ 内で定義する:

$$\phi_\alpha(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_\alpha^{(n)} + a_\alpha^{+(n)}) \cos n\xi$$

$$\pi_\alpha(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} i\sqrt{n} (a_\alpha^{(n)} - a_\alpha^{+(n)}) \sin n\xi.$$

上で求めた振幅の (s-channel の共振状態のエネルギーをさめる演算子) は

$$H = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} : \partial_\xi \phi(\xi) \cdot \partial_\xi \phi(\xi) + \pi(\xi) \cdot \pi(\xi) : d\xi,$$

vertex 部分は

$$V(p) = : \exp[i k \cdot \phi(0)] :$$

とかける。ここで $: \dots :$ は ノルマル積を表す。これはスカラー粒子の内部エネルギーが、量子化された弦ある物質の空洞共振のエネルギーに似ていることを示している。vertex の部分 $V(p)$ によって作られた状態を

$$V(p) | 0 \rangle \equiv | V(p) \rangle$$

で定義すれば、これはパラメータ空間でのコヒーレント
波状態、あるいは古典波状態となっている。とくに高エネルギーでは $\rho \rightarrow \infty$ であるから、この古典波の source 又は振幅は
 ∞ になる。そのため、振動のモード数と位相のゆらぎはそれぞれ
 $\delta n/n \ll 1$, $\delta x/x \ll 1$ となる。

正に古典波の特徴を示している。

この波動の性質を調べるには \mathbf{r} 空間での表示に変換した方が都合がよい。中間に $|\xi_1\rangle d\xi_1 \langle \xi_1| + |\xi_1, \xi_2\rangle d\xi_1 d\xi_2 \langle \xi_1, \xi_2| + \dots$ とおけば、

$$\begin{aligned} F(\xi_1, t) &= \langle \psi(\rho_3) | \frac{1}{H - \alpha} | \psi(\rho_2) \rangle \\ &= \int \langle \psi(\rho_3) | \xi_1 \rangle \langle \xi_1 | \frac{1}{H - \alpha} | \xi'_1 \rangle \langle \xi'_1 | \psi(\rho_2) \rangle d\xi_1 d\xi'_1 \\ &\quad + \int \langle \psi(\rho_3) | \xi_1, \xi_2 \rangle \langle \xi_1, \xi_2 | \frac{1}{H - \alpha} | \xi'_1, \xi'_2 \rangle \langle \xi'_1, \xi'_2 | \psi(\rho_2) \rangle d\xi_1 d\xi_2 d\xi'_1 d\xi'_2 \\ &\quad + \dots \\ &= \int \psi_{\rho_3}^*(\xi_1) G_{\alpha}^{(1)}(\xi_1, \xi'_1) \psi_{\rho_2}(\xi'_1) d\xi_1 d\xi'_1 \\ &\quad + \int \psi_{\rho_3}^*(\xi_1, \xi_2) G_{\alpha}^{(2)}(\xi_1, \xi_2; \xi'_1, \xi'_2) \psi_{\rho_2}(\xi'_1, \xi'_2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi'_1 d\xi'_2 \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

である。ここで G_{α} は古典波のグリーン関数としての従う
方程式は

$$(H - \alpha) G_{\alpha}^{(1)}(\xi, \xi') = \delta(\xi - \xi')$$

と言えよう。このようにして、パラメータ空間での調和振動子の波動場の時間依存性の内面や非線形波動との関係も議論してゆきたい。

— オ 振幅 $F(s, t)$ を フーリエ 変換 として 持つ よう な 一次元 波動 は どの よう なる か を 考え たい。 その ため の モデル として *generalized KdV* 方程式 を 考え たい。 方程式

$$u_t + u^{\frac{p}{p-1}} u_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$$

は ソリトン の 解

$$U(\xi) = A \left[\operatorname{sech} \frac{\xi}{\Delta} \right]^p, \quad \xi = x - ct$$

$$\begin{cases} c = \frac{p^2}{(p+1)(p+2)} A^{\frac{2}{p}} \\ \Delta = \frac{p\delta}{\sqrt{c}} \end{cases}$$

を持つ。簡単のために $\Delta = 1$ とおくとこのフーリエ変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^p \xi e^{-iQ\xi} d\xi = 2^{p-1} B\left(\frac{1}{2}(p+iQ), \frac{1}{2}(p-iQ)\right)$$

となる。この定義域は $Q: \text{real}$, $\operatorname{Re} p > 0$ であるが、

$$\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} Q|$$

の条件下で Q を複素平面に拡張できる。ここで

$$\begin{cases} P = J_s + J_t - d_s - d_t \\ Q = -i(J_s - J_t - d_s + d_t) \end{cases}$$

とあけは、 γ - π 変換は

$$2^{p-1} B(J_s - d_s, J_t - d_t)$$

となり、 s -channel, t -channel の最小スピン J_s, J_t により Veneziano 振幅に結びつくことがわかった。実際 π 中同子 π 中同子散乱で ^{定義} ~~振動~~ できる条件を求めてみるとこれは重粒子における運動量 p_{cm} が 400 MeV/c 以下ならば満たしたので、得られた B 函数を高エネルギー領域まで解析接続するのに充分であった。ここでは一次元波動を考えたが、これは §2 で述べたように球殻状の波束とみなせば、三次元波動と考えることができる。

最後に、著者に γ リトンの存在を知らせて下さった谷内俊彌氏と、有益な教学的議論として下さった飯野理一氏に感謝する。